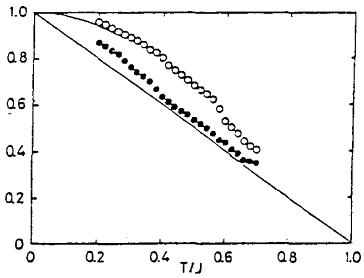


図1　$\overline{q}$(●)，q_{EA}(○)の温度依存性。実線，破線はそれぞれのレプリカ法の結果による値。

くないこともあって多少のずれはあるが，定性的，半定量的には一致しているといえよう。また，この計算は個々のサンプルについて複数の極小点の温度変化を同時に追跡して行われているが，温度上昇と共に極小点の併合が起こり，その数が減少していく様子をみることができる。レプリカ法の結果のとおり，[2] 極小点の集合が超計量性（ ultrametricity ）をもっているかどうかは今のところわからないが，その階層的構造の片鱗をうかがうことはできる。

さらに詳しい比較をする為には，より大きな系とより多くのサンプル数が必要なことは当然であるが，第一段階としては，レプリカ対称性の準安定状態による解釈の妥当性が，定性的に確かめられたと考えることができよう。

References

1)　G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1946.

2)　M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse and M. Virasoro, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1156; J. Physique **45** (1984) 843.

3)　D. J. Thouless, P. W. Anderson and R. G. Pamer, Phil. Mag. **35** (1977) 593.

4)　K. Nemoto and H. Takayama, J. Phys. **C18** (1985) L529.

スピングラスの動的分子場理論と磁場効果

東北大・工　白　倉　孝　行

§1.　はじめに

Sherrington と Kirkpatrick [1] によって提出された無限長距離相互作用モデル（ＳＫモデル）を考える。このモデルは，ＳＧの厳密解を与えるモデルとして注目され，主にレプリカ法を用いて詳しく調べられてきた。レプリカ法により安定解を得るためには，レプリカ対称性の破れが必要となり，[2] これまでで最も優れた解と考えられているのが，Parisi の解 [3] である。Parisi 解でのオーダーパラメーターは，０から１までの値をとるパラメーター x の関数 $q(x)$ で表現される。しかし，レプリカ法のみによってでは，次の疑問点が残る。①レプリカ対称性の破れの

物理的意味は何か。② Parisi パラメーター x の物理的意味は何か。これらの点を明らかにするためには，レプリカ法を用いない方法で Parisi 解を再導出し，上の疑問点を考える必要がある。レプリカ法を用いないアプローチとしては，次の２つのものが考えられている。ⅰ) 動的分子場理論による方法[4),5),6)]; この方法では，〝揺動散逸定理（ＦＤＴ）の破れ〟（あるいは〝Fischer の関係式[10)]の破れ〟）と呼ばれる疑問点にぶつかる。ⅱ) ＴＡＰ方程式[7)]による方法；この方法には，ランダム平均の取り方により，いろいろなアプローチがある。[8),9),11),12),13),14)] ここでは，動的分子場理論による方法に注目し，そこでの疑問点〝ＦＤＴの破れ〟を考察し，レプリカ対称性の破れの物理的意味を考えたい。

§ 2.　ＳＧの動的分子場理論

ここでは，次の Langevin dynamics に従う系を考える。

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = -r_0 \frac{\partial H_{\mathrm{eff}}}{\partial \sigma_i} + \eta_i(t)$$

$$<\eta_i(t)\eta_j(t')> = 2Tr_0\delta_{ij}\delta(t-t') \tag{1}$$

$$H_{\mathrm{eff}} = -\sum_{<ij>} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_i \left[\frac{1}{2}r\sigma_i^2 + \frac{1}{8}u\sigma_i^4 - h_i\sigma_i\right]$$

ここで，$\sum_{<ij>}$ はすべてのスピン対についての和を表わし，J_{ij} は平均値０，分散 $\widetilde{J}^2/N$ のガウス分布に従うランダム変数である。H_{eff} の中の r は $[<\sigma_i^2>]_J = 1$ より決められるとする（ここで，$<\cdots>$ はランダムノイズ平均，$[\cdots]_J$ はランダム配置平均とする）。σ_i は $-\infty$ から ∞ まで連続的に変化することができるとする。ここで注目する物理量は，応答関数 $G_{ij}(\omega)$

$$[<\sigma_i(\omega)>]_J = \sum_j G_{ij}(\omega)\widetilde{h}_j(\omega) + (\widetilde{h}\text{の一次以外の項}) \tag{2}$$

（ここで，$h_i = \underbrace{\widetilde{h}_i}_{\text{微小磁場}} + \underbrace{H}_{\text{外場}}$ とした）と相関関数 $C_{ij}(\omega)$，$\hat{C}_{ij}(\omega)$

$$C_{ij}(\omega)\,2\pi\delta(\omega+\omega') = [<\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega')>]_J - [<\sigma_i(\omega)><\sigma_j(\omega')>]_J$$

$$\hat{C}_{ij}(\omega)\,2\pi\delta(\omega+\omega') = [<\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega')>]_J \tag{3}$$

である。サイトに関する非対角項は小さい（例えば，$G_{ij} \propto O((1/N)^1, H^2)$）ので，対角項のみに注目する（$G_{ii}, C_{ii}, \hat{C}_{ii} \Rightarrow G, C, \hat{C}$）。$G(\omega)$ と $C(\omega)$ の間には，揺動散逸定理(FDT）と呼ばれる関係式 $C(\omega) = \dfrac{2T}{\omega}\mathrm{Im}\,G(\omega)$ が成立することが示される。[5),17),18)] 応答関数と

相関関数は，運動方程式(1)式から，次の形に求められる。

$$G^{-1}(\omega)=G_0^{-1}(\omega)+\Sigma(\omega)$$

$$C(\omega)=G(\omega)\Lambda(\omega)G(-\omega) \tag{4}$$

$$\hat{C}(\omega)=G(\omega)\hat{\Lambda}(\omega)G(-\omega)$$

ここで，$\Sigma(\omega)$，$\Lambda(\omega)$，$\hat{\Lambda}(\omega)$ の具体的表式は文献5)，17)，21)を参照されたい。静的外場 $H(\omega)=H2\pi\delta(\omega)$ 中では，(3)式から，

$$\hat{C}(\omega)=C(\omega)+q_0 2\pi\delta(\omega) \qquad (\text{ or } \hat{C}(t)=C(t)+q_0)$$

$$q_0=[<\sigma_i>^2]_J \tag{5}$$

が成立する。

§3. SK解，Hertz 解，Parisi 解

Sherrington と Kirkpatrick によって提出されたレプリカ対称性を仮定した解（SK解）に対応する解は，仮定 $\lim_{t\to\infty}C(t)=0$ によって求められることがわかる。仮定 $\lim_{t\to\infty}C(t)=0$ より，$C(\omega)$（FDTによって $G(\omega)$ も）は，$\omega=0$ に特異項をもたない。q_0 を決定する方程式は，$\hat{C}(\omega)=G(\omega)\hat{\Lambda}(\omega)G(-\omega)$ の両辺で $\delta(\omega)$ 項の係数を比較することによって得られる。しかしこの解は，SG相（AT線[2]以下）で不安定となることが，有効運動係数[5]を求めることによって示される。[17] SG相でも安定な解を得るために，Hertz [5]は $\lim_{t\to\infty}C(t)=q$ と仮定した。仮定 $\lim_{t\to\infty}C(t)=q$ は，〝$C(\omega)$ は $\omega=0$ に特異項（$\delta(\omega)$）をもつ〟ということを意味し，FDTから〝$G(\omega)$ も $\omega=0$ に特異項（$\delta_{\omega,0}$）をもつ〟ことが要請される。ここで，さらに有限の大きさの系を考え，これらの特異項はぼかされるとする。q_0 に関わるデルタ関数のぼけを ε_0，q に関わるデルタ関数のぼけを ε として $\varepsilon_0\ll\varepsilon\ll r_0 T$ を仮定する。$\hat{C}(\omega)=G(\omega)\hat{\Lambda}(\omega)G(-\omega)$ の両辺を，これらの仮定のもとに，それぞれの周波数区間で積分することにより，q_0 と q を決める方程式をもつ（Hertz 解）。[5),17),19)] この解は，q の緩和時間 ε^{-1} よりも短い時間スケールでは安定であるが，それよりも長い時間スケールでSK解と同様な不安定性をもつことが示される。長時間スケールで安定な解は，Sompolinsky [4]によって議論された。Sompolinsky は，有限の大きさの系で，Hertz 解のように単一の緩和時間 ε^{-1} をもつ q だけでなく，いろいろな緩和時間 $\{\varepsilon_j^{-1}\}$ をもつ凍結パラメーター $\{q_j\}$ を考えた。それに従って，相関関数を

$C(\omega)=\bar{C}(\omega)+\sum_{j=1}^{\hat{N}} q_j\,2\varepsilon_j/(\omega^2+\varepsilon_j^2)$ と書く。ここで，$\varepsilon_1^{-1}\gg\varepsilon_2^{-1}\gg\cdots\gg\varepsilon_{\hat{N}}^{-1}$ とする。これらの緩和時間は熱力学極限ですべて無限大になるとする。応答関数も同様に，$G(\omega)=\bar{G}(\omega)+\sum_{j=1}^{\hat{N}}\hat{\delta}_j\,\varepsilon_j/(-\mathrm{i}\omega+\varepsilon_j)$ と書く。ここで，$\bar{C}(\omega)$，$\bar{G}(\omega)$ は熱力学極限で $\omega=0$ に特異項をもたない部分であり，$\bar{C}(\omega)=\dfrac{2T}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\bar{G}(\omega)$ が成立しているとする。$\{\hat{\delta}_j\}$ を異常応答パラメーターと呼ぶことにする。$\hat{C}(\omega)=G(\omega)\hat{\Lambda}(\omega)\,G(-\omega)$ の両辺を，それぞれの周波数区間で積分することにより，$\{q_j\}$ と $\{\hat{\delta}_j\}$ の1組（$\hat{N}$個）の関係式を得る。$\{q_j\}$，$\{\hat{\delta}_j\}$ を決めるためにはもう1組の関係式が必要となる。$G(\omega)$ と $C(\omega)$ にFDTを要請すると，もう1組の関係式 $T\hat{\delta}_j=q_j$，$j=1,\cdots,\hat{N}$ を得る。しかし，この場合には $\mathrm{d}q(x)/\mathrm{d}x=0$ の解しか存在せず，Hertz 解に帰してしまうことがわかる。（ここで，連続極限 $\hat{N}\to\infty$ を考え，$n/\hat{N}=x_n$，$\sum_{j=0}^{n} q_j=q(x_n)$，$\sum_{j=1}^{n}\hat{\delta}_j=\hat{\delta}(x_n)$ と記した。）長時間スケールで安定な解を得るためには，$\dfrac{\mathrm{d}q(x)}{\mathrm{d}x}\neq 0$ となる解が必要で，[5), 17)] そのためには，

$$T\hat{\delta}(x)=f(x)\,q(x) \tag{6}$$

$f(x)$; $f(x=0)=0$，$f(x=1)=1$ を満足する連続単調増加関数という関係式が必要である（$T\hat{\delta}(x)=xq(x)$ とすると，Parisi 解となる。[4)]）。しかし，(6)式はFDT の要請と矛盾しているように見える（〝FDTの破れ〟）。

§4. 〝FDTの破れ〟について

〝FDTの破れ〟の問題に対しては，Sommers [6)] と Sompolinsky · Zippelius [20)] の議論がある。ここでは，Sompolinsky · Zippelius の議論を紹介し，さらに異常応答という観点から考察を深めてみたい。[21)]

i) Sompolinsky · Zippelius の議論[20)]

Sompolinsky らは，分子場理論で安定な解を得るために使う帯磁率は，$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\left[\frac{\partial\langle\sigma_i\rangle}{\partial h_i}\right]_J$ ではなくて，$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\left[\frac{\delta\langle\sigma_i\rangle}{\delta h_i}\right]_J$ であると考えた。ここで，δh_i は有限系では有限であり，$N\to\infty$ で零となる量とする。$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\left[\frac{\partial\langle\sigma_i\rangle}{\partial h_i}\right]_J$ は相関関数とFDTによって関係づけられている。SG相では大きなスピンクラスターの影響で $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\left[\frac{\partial\langle\sigma_i\rangle}{\partial h_i}\right]_J$ と $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\left[\frac{\delta\langle\sigma_i\rangle}{\delta h_i}\right]_J$ とは必ずしも一致しない。その様子を図1に示す。[20)] この議論は Kirkpatrick · Young [22)] による有限系での厳密解によっても示唆されている。

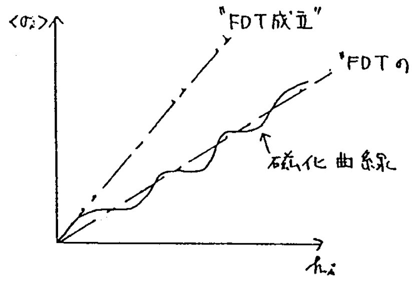


図1　有限系のＳＧ相での
磁化磁場曲線[20)]

ii）異常応答からの考察[21)]

Sompolinsky らの議論に従って，有限系での帯磁率 $[\frac{\delta<\sigma_i>}{\delta h_i}]_J$ を考察する。強磁性体の強磁性相では，δh_i を $\delta h_i \sim O(T/N)$ 程度の大きさの一様磁場と考えることによって，１つの極小状態での帯磁率を計算すればよいことになる。異常応答は極小状態間の飛び移りの効果と考えるので，強磁性体の分子場理論に異常応答は生じない。ＳＧのＳＧ相では外場が零のとき，巨視的磁化は生じていないが，磁化のゆらぎに対応する $O(\sqrt{N})$ 程度の大きさの磁化をもつ極小状態が多数存在していると考えられる。[15),16)] そこで，δh を $\delta h \sim O(T/\sqrt{N})$ 程度の大きさの一様磁場と考えることによって，$O(\sqrt{N})$ 程度の大きさの磁化をもつ最も大きなスピンクラスターの磁化反転は禁止されると考えられる。このスピンクラスターは最も緩和時間の長い凍結 q_1 に寄与するものと考えられ，磁化反転は禁止されるので，このスピンクラスターからの異常応答への寄与は零である（$T\hat{\delta}_1 = 0$）。これに対して，最も小さいスピンクラスターは小さい磁化しかもたないので，δh の影響を受けない。このスピンクラスターは最も緩和時間の短い凍結 $q_{\hat{N}}$ に寄与するものと考えられ，δh の影響を受けないのでＦＤＴから $T\hat{\delta}_{\hat{N}} = q_{\hat{N}}$ を得る。この両極限の中間的な状態のスピンクラスターが存在するとして，連続的につなぐことができれば，凍結パラメーターと異常応答パラメーターの関係式(6)式を得ることができる。

この議論を，自由エネルギーの位相空間での構造という観点から見直してみよう。強磁性体の場合には，短い時間スケールで閉じ込められた状態と，磁場 δh によって閉じ込められた状態は，熱力学極限 $N \to \infty$ で等価である（図２）。これに対してＳＧでは，たくさんの自由エネルギーの極小状態を磁化反転に対応する２つのグループに分けられるとすると，δh はその一方を選択するという効果しかもたない。この場合には，δh はかけられずに短時間スケールで閉じ込められた状態と，δh によって閉じこめられた状態は熱力学極

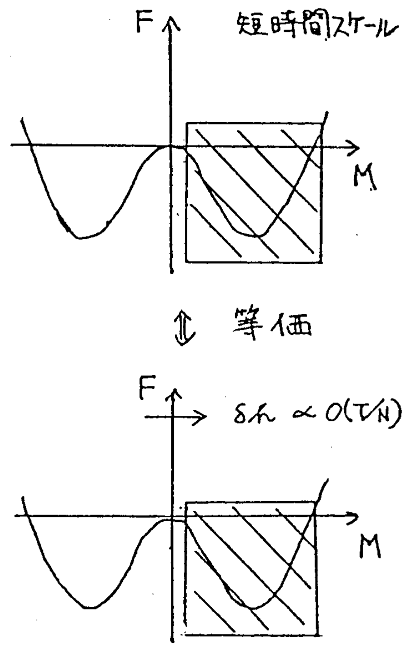


図２　強磁性相での自由エネルギー

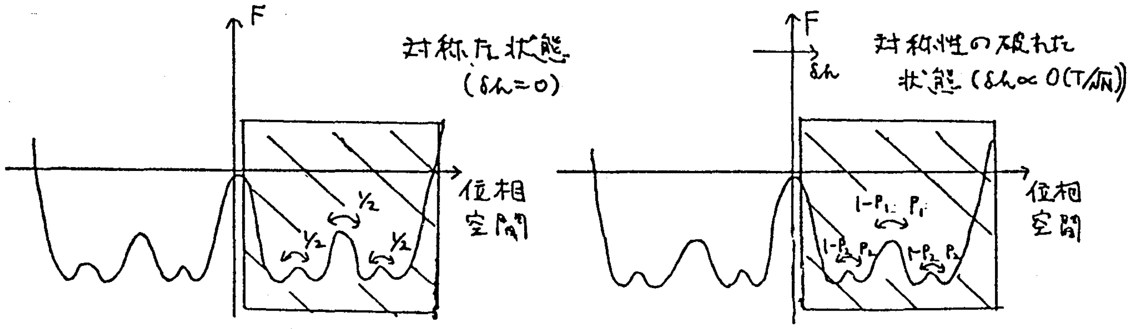


図3　$u\neq0$ のＳＧの自由エネルギー

限でも必ずしも等価ではない（図３）。なぜなら，δh が閉じ込められた状態間の対称性も部分的に破ってしまうことが考えられるからである。図３のように，自由エネルギーの階層構造を考え，n 階層目でのスピンクラスターの磁化反転が δh 中で，P_n ：$1-P_n$ の割合では生じると考えることにより，$\{P_n\}$ が Parisi パラメーター x と関係づけられることが示される。[21]

§5.　実験との対応とまとめ

紙数がないので，文献を参照されたい。[5,17,23,21]

References

1) D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1792.
2) J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, J. Phys. **A11** (1978) 983.
3) G. Parisi, J. Phys. **A13** (1980) 1887.
4) H. Sompolinsky, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 935.
5) J. A. Hertz, J. Phys. **C16** (1983) 1219, 1233.
6) H.-J. Sommers, Z. Phys. **B50** (1983) 97.
7) D. J. Thouless, P. W. Anderson and R. G. Palmer, Philos. Mag. **35** (1977) 593.
8) H.-J. Sommers, C. De Dominicis and M. Gabay, J. Phys. **A16** L679.
9) C. Dasgupta and H. Somplinsky, Phys. Rev. **B27** (1983) 4511.
10) K. H. Fischer, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1438.
11) C. De Dominicis and A. P. Young, J. Phys. **A16** (1983) 2063.
12) G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **50** (1975) 1438.
13) A. J. Bray, M. A. Moore and A. P. Young, J. Phys. **C17** (1984) L155.
14) A. Houghton, S. Jain and A. P. Young, J. Phys. **C16** (1983) L375.

15) A. J. Bray and M. A. Moore, J. Phys. **C13** (1980) L469.
16) C. De Dominicis, M. Gabay, T. Garel and H. Orland, J. de Phys. **41** (1980) 923.
17) T. Shirakura, J. Phys. **C17** (1984) 1961.
18) S. K. Ma, "Modern Theory of Critical Phenomena".
19) H. -J. Sommers, Z. Phys. **B31** (1978) 301.
20) H. Sompolinsky and A. Zippelius, Phys. Rev. **B25** (1982) 6860.
21) T. Shirakura, to be published J. Phys. A.
22) S. Kirkpatrick and A. P. Young, J. Appl. Phys. **52(3)** (1981) 1712.
23) T. Shirakura, J. Phys. **A17** (1984) L367.

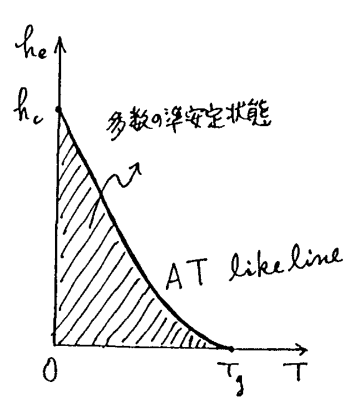
磁場中のスピングラス

東北大・工　猪苗代　盛，桂　重俊

磁場中冷却，零磁場冷却帯磁率などの現象に関連して，スピングラスには多数の準安定な状態が重要な役割を果していると考えられている。我々は短距離相互作用のスピングラスが実験的にも注目をあびつつあることを慮し，このような系についての準安定な多数の状態を有効場の分布関数法における多重解としてとらえ，その磁場依存性について調べることを目的とする。

無限長距離ガウス型相互作用のスピングラスでは，ＳＫ解の安定不安定の境界線としてＡＴラインが定義され，ＡＴライン以下の温度ではレプリカ対称性の破れに解が存在する。

このレプリカ対称性の破れの物理的意味は Parisi（1983）[1] によると，多数の準安定状態が存在することを解釈される。レプリカ法の使えない±Ｊランダムボンド Ising モデルの場合にも，それに相当して温度磁場平面で，多数の準安定状態がある領域とそうでない領域との境界線として，図に示すようなＡＴ like line が存在すると予想される。Ｔ＝０ではその臨界磁場は，ＳＫモデルと違って有限であろう。



有効場の分布関数に対する非線型の積分方程式は，

$$g(h) = p\int\delta\,[\,h - \mathrm{sgn}(h' + h_e)\min(J_0,\ |h' + h_e|\,g^{(z-1)}(h')\,dh'$$